



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

. ۱

(۲ نمره)

اگر جمله عمومی یک دنباله حسابی به صورت $t_n = (m-2)n^2 + (2m+3)n + 4$ باشد، جمله چندم این دنباله برابر ۶۰ است؟

پاسخ :

جمله عمومی یک دنباله حسابی از مرتبه اول n است، پس $m - 2 = 0$ و $m = 2$ است.

$$t_n = (m-2)n^2 + (2m+3)n + 4 \xrightarrow{m=2} t_n = 7n + 4 \xrightarrow{t_n=60} 60 = 7n + 4 \Rightarrow n = 8$$

. ۲

(۳ نمره)

جمله عمومی یک دنباله داده شده است. کدام گزینه جای خالی را به درستی پر می‌کند؟

$$b_n = -n + 4 : 3, 2, 1, 0, \dots, -2$$

پاسخ :

کافی است n را در رابطه داده شده برابر ۵ در نظر بگیریم.



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۴۴۰۲۵۸۶۰ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۸۸۹۰۴۰۰۲

کد تهران ۰۲۱

۳.

(۴ نمره)

$n(A \cap B) = 30$ و $n(B) = 50$ ، $n(A) = 70$ ، $n(U) = 110$ اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U هستند. حاصل $n(A' \cap B)$ را بیابید. (فرقان مقتدرمنصوری)

پاسخ :

$$n(A' \cap B) = n(B \cap A') = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 50 - 30 = 20$$

۴.

(۴ نمره)

جمله عمومی الگوی زیر را به دست آورید. (حسین لهراب)



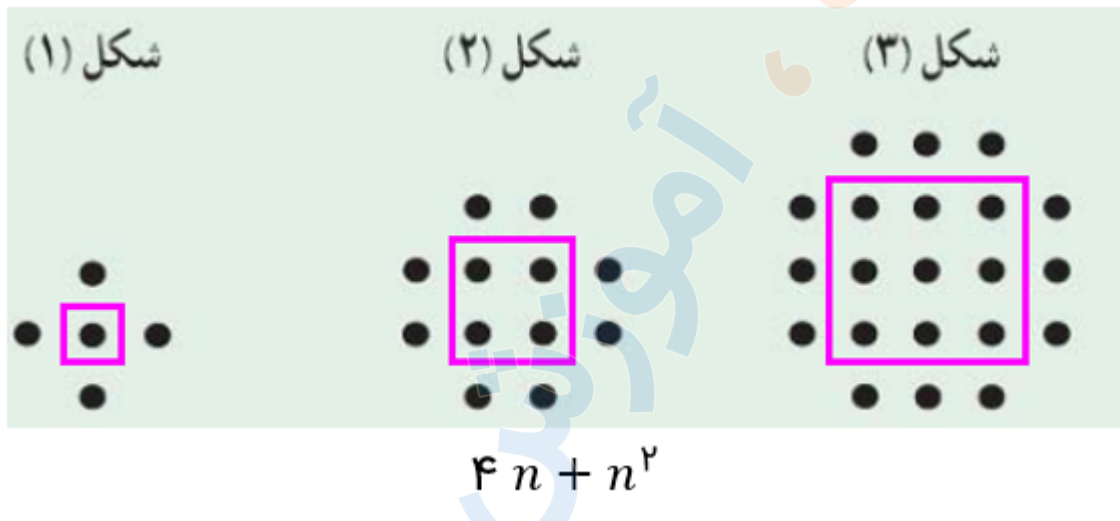
پاسخ :



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۴۴۰۲۵۸۶۰ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۸۸۹۰۴۰۰۲

کد تهران ۰۲۱



۵.

(۴ نمره)

کدام گزینه واسطه هندسی بین دو عدد ۳ و ۴۸ را نشان می‌دهد؟ (رضا رخ‌فروز)

پاسخ :

$$\text{واسطه هندسی} = \sqrt{3 \times 48} = \sqrt{144} = 12$$

۶.



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

(۲ نمره)

درستی تساوی زیر را اثبات کنید. (فرقان مقتدرمنصوری)

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

پاسخ:

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} \quad \blacksquare$$

(۳ نمره)

درستی تساوی زیر را بررسی کنید:

$$(1 - \cos^2 \theta)(1 - \sin^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) = \sin^2 \theta$$

پاسخ:

$$(1 - \cos^2 \theta)(1 - \sin^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) = \sin^2 \theta \times \cancel{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{\cancel{\cos^2 \theta}} = \sin^2 \theta$$



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

.۸

(۴ نمره)

درستی تساوی زیر را بررسی کنید. (دبیرستان سرای دانش - تهران ۱۴۰۲)

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 2$$

پاسخ :

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2 =$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta = 1 + 1 = 2$$

.۹

(۴ نمره)

اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید.

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

پاسخ :

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_1 = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۴۴۰۲۵۸۶۰ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۸۸۹۰۴۰۰۲

کد تهران ۰۲۱

. ۱۰

(۴ نمره)

انتهای کمان روبه‌رو به زاویه θ در کدام ناحیه باشد تا تساوی زیر برقرار باشد؟

$$\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

پاسخ :

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \times \frac{\sqrt{1 + \cos \theta}}{\sqrt{1 + \cos \theta}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\sqrt{(1 + \cos \theta)^2}} = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta}}{\sqrt{(1 + \cos \theta)^2}} =$$

$$\frac{|\sin \theta|}{|1 + \cos \theta|} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

می‌دانیم $1 + \cos \theta$ همواره مثبت است، پس باید $\sin \theta$ هم مثبت باشد تا **تساوی بالا** برقرار شود. $\sin \theta$ در ناحیه‌های **اول و دوم** مثبت است.

. ۱۱

(۲ نمره)

$$\frac{x^2 - 2}{x^2 + 2x} + \frac{1}{x + 2}$$

حاصل عبارت مقابل را به ساده‌ترین صورت بنویسید.



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

پاسخ :

$$\frac{x^2-2}{x^2+2x} + \frac{1}{x+2} = \frac{x^2-2}{x(x+2)} + \frac{1}{x+2} = \frac{x^2-2+x}{x(x+2)}$$
$$= \frac{\cancel{(x+2)}(x-1)}{x\cancel{(x+2)}} = \frac{x-1}{x}$$

. ۱۲

(۲ نمره)

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{64}}$$

حاصل عبارت مقابل را بیابید:

پاسخ :

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2^{\frac{6}{6}} = 2$$



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

۱۳.

(۴ نمره)

اگر $a^2 + b^2 = 3$ باشد، حاصل $a^6 + b^6 + 9a^2b^2$ را بیابید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 = 3 &\Rightarrow (a^2 + b^2)^3 = 3^3 \Rightarrow a^6 + b^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 = 27 \\ &\Rightarrow a^6 + b^6 + 3a^2b^2(a^2 + b^2) = 27 \Rightarrow a^6 + b^6 + 9a^2b^2 = 27 \end{aligned}$$

۱۴.

(۴ نمره)

حاصل عبارت مقابل را به ساده‌ترین صورت بنویسید: $\sqrt[4]{(2 - \sqrt{5})^4} \times \sqrt[3]{(\sqrt{5} + 2)^3}$

پاسخ:



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

$$\sqrt[4]{(2 - \sqrt{5})^4} \times \sqrt[3]{(\sqrt{5} + 2)^3} = |2 - \sqrt{5}| \times (\sqrt{5} + 2)$$
$$\stackrel{2 < \sqrt{5}}{=} (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = 5 - 4 = 1$$

. ۱۵

(۴ نمره)

اگر $x + \frac{1}{x} = 4$ باشد، حاصل $x^4 + \frac{1}{x^4}$ را بیابید.

پاسخ :

$$x + \frac{1}{x} = 4 \stackrel{\text{توان دو}}{\implies} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 4^2 \implies x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x\left(\frac{1}{x}\right) = 16 \implies x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$$
$$\stackrel{\text{توان دو}}{\implies} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = 14^2 \implies x^4 + \frac{1}{x^4} + 2x^2\left(\frac{1}{x^2}\right) = 196 \implies x^4 + \frac{1}{x^4} = 194$$

. ۱۶



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

(۲ نمره)

پاسخ نامعادله زیر کدام است؟

$$5x - 1 \geq 3x - 7$$

پاسخ :

$$5x - 3x \geq 1 - 7$$

$$2x \geq -6 \qquad x \geq -3$$

. ۱۷

(۳ نمره)

مربع عددی برابر با همان عدد به علاوه عدد یک است. کدام معادله ما را به این عدد می رساند؟

پاسخ :

کافیست عدد را برابر x در نظر بگیریم و صورت سوال را به زبان ریاضی بنویسیم.

. ۱۸



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

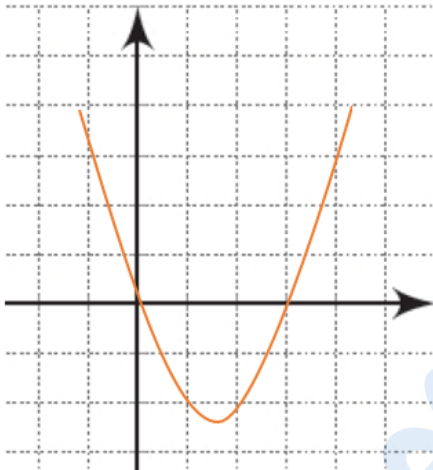
۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

(۴ نمره)

سهمی $y = x^2 - 3x$ را رسم کنید. (حسین لهراب)

پاسخ:



$$x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}, \quad y_s = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$$
$$\Rightarrow S\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

$$y = x^2 - 3x = x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3$$

۱۹.

(۴ نمره)

به ازای چه مقداری از k عبارت زیر همواره مثبت است؟

$$y = x^2 + 3x + k$$

پاسخ:



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

$$k > \frac{9}{4} \quad \bullet \quad 9 - 4(1)k < 0 \quad \bullet \quad \Delta < 0$$

۲۰.

(۴ نمره)

$x=1$ ریشه مضاعف معادله داده شده در کدام گزینه نیست؟

پاسخ :

$$(x-1)^2 = 0 \quad x^2 + 2x + 1 = 0$$

با ضرب این معادلات در یک عدد ثابت مثل ۲ نیز، معادله جدیدی با ریشه های برابر به دست می آید.

۲۱.

(۲ نمره)

در تابع خطی $f(x)$ ، $f(2) = 7$ و $f(-1) = 1$ باشد، $f(x)$ را به دست آورید.

پاسخ :



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

$$a = \frac{7-1}{2-(-1)} = \frac{6}{3} = 2 \quad \xrightarrow{(-1,1) \in f} \quad 1 = 2(-1) + b \quad \Rightarrow \quad b = 3 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2x + 3$$

. ۲۲

(۳ نمره)

کدام مجموعه از زوج مرتبها نمی تواند نمایش یک تابع باشد؟

پاسخ :

F, H, I: تابع هستند، زوج هایی با مولفه های اول یکسان و مولفه های دوم متفاوت نداریم.

G: تابع نیست، در زوج مرتب اول و آخر با مولفه اول یکسان ۴، مولفه های دوم متفاوت هستند.

. ۲۳

(۴ نمره)

با ذکر دلیل توضیح دهید که چرا «رابطه هر مادر با فرزندانش» الزاما تابع نیست اما «رابطه هر مادر با تعداد

فرزندانش» تابع است؟ (دبیرستان سرای دانش - تهران ۱۴۰۲)

پاسخ :

ممکن است یک مادر چند فرزند داشته باشد، اما قطعا تعداد فرزندان هر مادر عددی واحد است.



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

. ۲۴

(۴ نمره)

در تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & |x - 2| \geq 1 \\ 1 - x & |x - 2| < 1 \end{cases}$ حاصل $f(f(-\sqrt{2}))$ را بیابید؟

پاسخ:

$$|-\sqrt{2} - 2| = |\sqrt{2} + 2| \geq 1 \rightarrow f(-\sqrt{2}) = \frac{1}{-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \left| \frac{-\sqrt{2}}{2} - 2 \right| \geq 1$$

$$\rightarrow f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

. ۲۵

(۴ نمره)

اگر $f(1 - 2x) = \frac{1}{x + 1}$ باشد، $f(x)$ را به دست آورید.



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

پاسخ :

$$f(1-2x) = \frac{1}{x+1} \quad : 1-2x = t \rightarrow x = \frac{1-t}{2}$$

$$f(t) = \frac{1}{\frac{1-t}{2} + 1} \rightarrow f(t) = \frac{2}{3-t} \rightarrow f(x) = \frac{2}{3-x}$$

. ۲۶

(۲ نمره)

کتابخانه مدرسه ای ۴۰ کتاب در زمینه ریاضی و ۵۰ کتاب در زمینه ادبیات دارد. اگر یک دانش آموز بخواهد یکی از کتاب های کتابخانه را در زمینه ریاضی یا ادبیات انتخاب کند، به چند راه می تواند این کار را انجام دهد؟

پاسخ :

$$50 + 40 = 90$$

بنابراین ۹۰ راه وجود دارد.

. ۲۷



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

(۲ نمره)

تعداد مقسوم علیه های طبیعی عدد $2^3 \times 3^4 \times 5^2$ چند تا است؟

پاسخ :

$$(3 + 1)(4 + 1)(2 + 1) = 4 \times 5 \times 3 = 60$$

. ۲۸

(۴ نمره)

گل فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟ (دبیرستان سرای دانش - تهران ۱۴۰۲)

پاسخ :

$$\binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} = 120 + 210 + 252 = 582$$

. ۲۹



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۴۴۰۲۵۸۶۰ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۸۸۹۰۴۰۰۲

کد تهران ۰۲۱

(۴ نمره)

در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۴ داور ایرانی ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته ای تشکیل شود، به ترتیب به چند روش می توان این کار را انجام داد اگر کمیته ۴ نفری باشد و اگر کمیته ۳ نفری باشد و از هر یک از سه کشور، یک نفر در کمیته باشد؟

پاسخ :

اگر کمیته ۴ نفری باشد:

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

و اگر کمیته ۳ نفری باشد و از هر یک از سه کشور، یک نفر در کمیته باشد:

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

. ۳۰

(۴ نمره)

اگر $C(n, r) = 10$, $P(n, r) = 60$ باشد آنگاه n چند است ؟

پاسخ :



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} \rightarrow P(n, r) = r! C(n, r) \rightarrow 70 = r! \times 10 \rightarrow r! = 7 = 3! \rightarrow r = 3$$

$$P(n, 3) = 70 \rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 70 \rightarrow \frac{r(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 70$$

$$n(n-1)(n-2) = 5 \times 4 \times 3 \rightarrow n = 5$$