



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۴۴۰۲۵۸۶۰ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۸۸۹۰۴۰۰۲

کد تهران ۰۲۱

۱.

(۴ نمره)

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (هماهنگ کشوری خرداد ۱۴۰۱)

«تابع  $f(x) = \sqrt{2}x - x^2$  یک تابع درجه دوم است.»

پاسخ:

درست (صفحه ۲ کتاب درسی)

۲.

(۴ نمره)

نمودار تابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید:

$$y = \left| \frac{1}{x-1} \right|$$

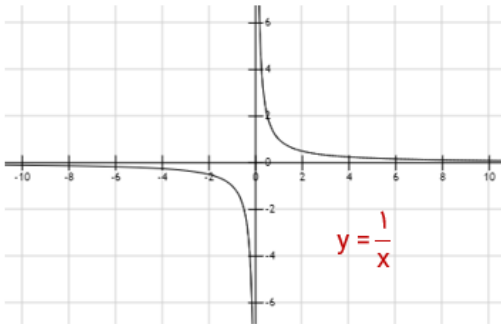
پاسخ:



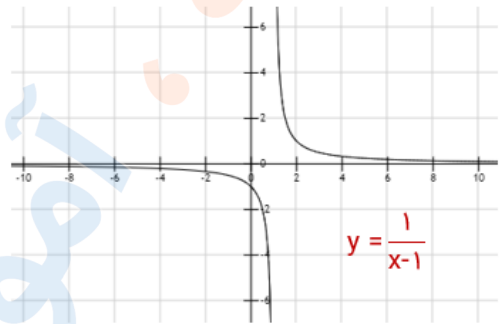
تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

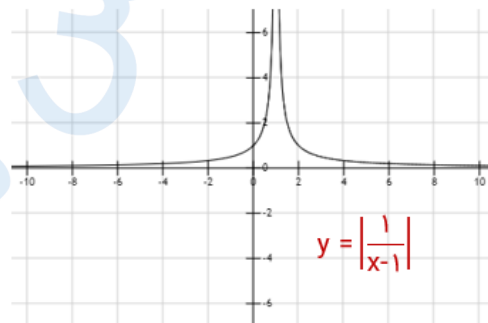
کد تهران ۰۲۱



۱ واحد به راست



قرینه یهای منفی نسبت به محور Xها



۳ .

(۶ نمره)

نمودار تابع  $f(x) = 2\sqrt{x-1} - 3$  را رسم کنید و سپس دامنه و برد وارون آن را بیابید. (مسعود ارژنگ)

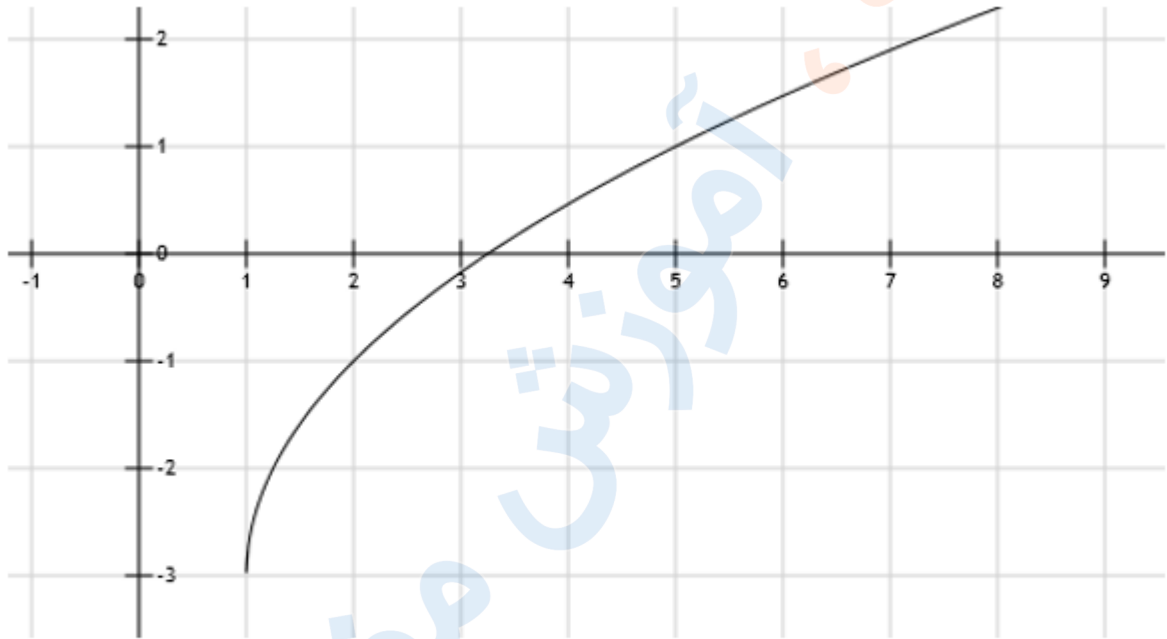
پاسخ :



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱



$$D_{f^{-1}} = R_f = [-3, +\infty) , R_{f^{-1}} = D_f = [1, +\infty)$$

. ۴

(۶ نمره)

اگر  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$  و  $g(x) = \sqrt{x - 4}$  باشد، ضابطه تابع  $g \circ f$  را بیابید. (بابک دهقانی)

پاسخ :



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۴۴۰۲۵۸۶۰ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۸۸۹۰۴۰۰۲

کد تهران ۰۲۱

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{1}{x^2 - 1} - 4}$$

۵.

(۴ نمره)

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (محمد خوشرو)

« تابع  $y = \tan x$  در هر بازه‌ای که تعریف شده باشد صعودی است. »

پاسخ :

درست

۶.

(۴ نمره)

با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در کدام یک از ناحیه‌های مختصات نامعاده  $\tan a < \sin a$  برقرار است؟

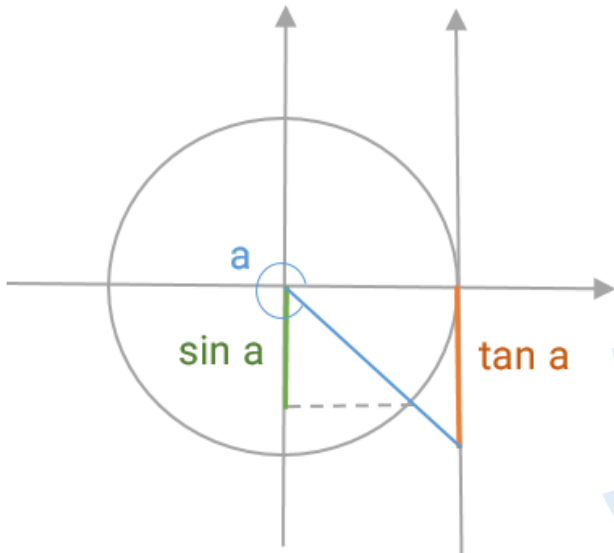
پاسخ :



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱



با توجه به شکل و همچنین منفی بودن  $\sin$  و  $\tan$  در ربع ۲ و ۴ مشخص است در ناحیه‌های دوم و چهارم مختصات  $\sin a > \tan a$  می‌باشد.

(۶ نمره)

دوره تناوب تابع  $y = ۳ - \frac{1}{۲} \sin ۳x$  را به دست بیاورید. (ابراهیم داشن)

پاسخ:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{۳}$$



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

. ۸

(۶ نمره)

معادله زیر را حل کنید.

$$\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

پاسخ :

$$\begin{aligned} \sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4} &\Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4} &\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8}, x = \frac{(2k+1)\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

. ۹

(۴ نمره)

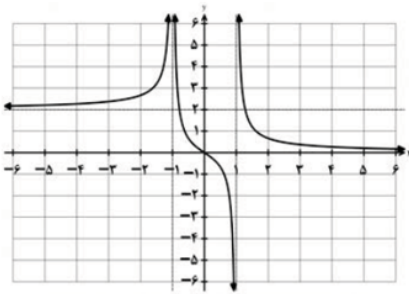


تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۴۴۰۲۵۸۶۰ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۸۸۹۰۴۰۰۲

کد تهران ۰۲۱

نمودار تابع  $f$  به صورت شکل مقابل است. مقدار  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  کدام است؟ (همانگ کشوری خرداد ۱۴۰۱)

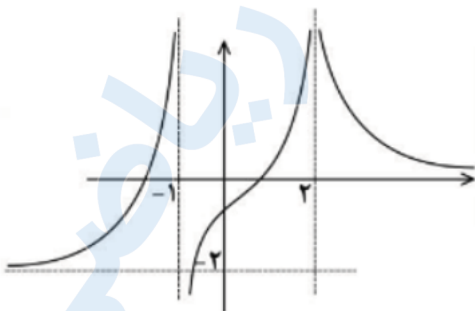


پاسخ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(۴ نمره)

با توجه به نمودار تابع  $f(x)$  حاصل حد زیر را بیابید. (بابک دهقانی)



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$$



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

پاسخ :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$$

. ۱۱

(۶ نمره)

حاصل حد زیر را بیابید. (محمد خوشرو)

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \log \left( \frac{x+1}{x-3} \right)$$

پاسخ :

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \log \left( \frac{x+1}{x-3} \right) = \log \left( \frac{4}{0^+} \right) = \log(+\infty) = +\infty$$

. ۱۲

(۶ نمره)





تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2-4|}{ax^2-3x-2} = -1$  باشد، آن گاه حد راست این عبارت در نقطه  $x=-2$  را به دست آورید.

پاسخ :

از هم‌ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2-4|}{ax^2-3x-2} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2|}{ax^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{ax^2} = -1 \Rightarrow a = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x^2-4|}{-x^2-3x-2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|(x-2)(x+2)|}{-(x^2+3x+2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x-2||x+2|}{-(x+1)(x+2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x-2|\cancel{(x+2)}}{-(x+1)\cancel{(x+2)}} = \frac{|-2-2|}{-(-2+1)} = 4$$

. ۱۳

(۴ نمره)

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (محمد خوشرو)

«شرط لازم و کافی برای مشتق‌پذیری پیوستگی است.»



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۴۴۰۲۵۸۶۰ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۸۸۹۰۴۰۰۲

کد تهران ۰۲۱

پاسخ :

نادرست؛ پیوستگی شرط لازم برای مشتق پذیری است، اما کافی نیست.

. ۱۴

(۴ نمره)

تابع  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  در چه نقطه‌ای دارای مماس قائم است؟

پاسخ :

ابتدا با استفاده از قواعد مشتق‌گیری از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

دامنه تابع مجموعه اعداد حقیقی است و مقدار مشتق به ازای  $x = 0$  برابر  $+\infty$  می‌شود، پس می‌توان گفت تابع در  $x = 0$  مماس قائم دارد.

. ۱۵

(۶ نمره)



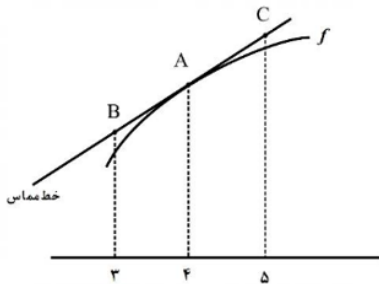
تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

برای تابع  $f$  در شکل روبه‌رو  $f'(4) = 1,5$  و  $f(4) = 24$  است. با توجه به شکل، مختصات نقطه  $C$  را بیابید.

(همانگ کشوری خرداد ۱۴۰۰)



پاسخ :

$$f'(4) = \frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = 1,5 \Rightarrow f(5) - 24 = 1,5 \Rightarrow f(5) = 25,5 \Rightarrow C(5, 25,5)$$

. ۱۶

(۶ نمره)

مشتق پذیری تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \geq 1 \\ -(x-1)^2 & x < 1 \end{cases}$  در نقطه  $x=1$  را بررسی کنید.

پاسخ :



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

با توجه به پیوستگی تابع در نقطه  $x = 1$ ، شرط مشتق‌پذیری تابع آن است که مشتق‌های چپ و راست تابع در این نقطه موجود و با هم برابر باشند، داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^2 - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0 \\ f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)^2 - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x-1) = 0 \end{aligned} \right.$$

$f'_+(1) = f'_-(1)$  پس تابع در  $x = 1$  مشتق‌پذیر است.

. ۱۷

(۴ نمره)

در بین تمام مستطیل‌هایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، طول و عرض مستطیلی با بیش‌ترین مساحت را بیابید. (هماهنگ کشوری خرداد ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$\begin{aligned} 2(x+y) &= 14 \Rightarrow y = 7 - x \Rightarrow S = xy = x(7 - x) \Rightarrow S(x) = -x^2 + 7x \\ \Rightarrow S'(x) &= -2x + 7 = 0 \Rightarrow x = 3,5, \quad y = 3,5 \end{aligned}$$

. ۱۸

(۴ نمره)



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۴۴۰۲۵۸۶۰ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۸۸۹۰۴۰۰۲

کد تهران ۰۲۱

مقادیر  $m$  و  $n$  را طوری بیابید که نقطه  $A(-1, 4)$  نقطه اکسترمم نسبی تابع  $f(x) = mx^3 - nx + 2$  باشد.

پاسخ:

$$f(-1) = -m + n + 2 = 4 \Rightarrow -m + n = 2 \quad (1)$$

$$f'(x) = 3mx^2 - n \Rightarrow f'(-1) = 3m - n = 0 \quad (2)$$

$$\stackrel{1,2}{\Rightarrow} m = 1, n = 3$$

.۱۹

(۶ نمره)

نقاط بحرانی تابع با ضابطه زیر را مشخص کنید:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 0 \\ x^3 - 3x & x < 0 \end{cases}$$

پاسخ:



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

$$D_f = R, f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x > 0 \\ 3x^2 - 3 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -1, x = +1 \end{cases}$$

نقطه  $x=0$  نیز که تابع در آن مشتق ندارد یکی از نقاط بحرانی تابع است.

۲۰.

(۶ نمره)

نقاط یکنوایی (صعودی و نزولی بودن) تابع زیر را مشخص کنید:

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$$

پاسخ:



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

$$D_f = R, \quad f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) \Rightarrow$$

	-۱	۰	۲	
$x$	-	-	۰	+
$x^2 - x - 2$	+	۰	-	+
$f'(x)$	-	۰	+	-
	نزولی	صعودی	نزولی	صعودی