



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

.۱

(۲ نمره)

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (هماهنگ کشوری خرداد ۱۴۰۱)

«تابع $f(x) = \sqrt{2}x - x^2$ یک تابع درجه دوم است.»

پاسخ:

درست (صفحه ۲ کتاب درسی)

.۲

(۲ نمره)

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (بابک دهقانی)

«تابع $f(x) = 2x(1 - 3x^2) + 1$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه ۳ است.»

پاسخ:

درست؛ $f(x) = 2x(1 - 3x^2) + 1 = -6x^3 + 2x + 1$



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۴۴۰۲۵۸۶۰ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۸۸۹۰۴۰۰۲

کد تهران ۰۲۱

۳.

(۳ نمره)

اگر f تابعی اکیدا نزولی و $f(3a+1) > f(4a-3)$ باشد، حدود مقادیر a کدام است؟

(۱) $(-\infty, +4)$ (۲) $(-4, -1)$ (۳) $(-\infty, -4)$ (۴) $(4, +\infty)$

پاسخ:

جواب: ۴

$$f(3a+1) > f(4a-3) \quad a=?$$

چون تابع f اکیدا نزولی است باخفت f در نامساوی داده شده جهت معکوس میشود

$$f(x_2) > f(x_1) \xrightarrow{f \text{ نزولی است}} x_2 < x_1$$
$$\Rightarrow 3a+1 < 4a-3 \Rightarrow a > 4 \quad a \in (4, +\infty)$$

۴.

(۶ نمره)

بزرگترین بازه‌ای که تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در آن اکیدا نزولی است برابر است.

(هماهنگ کشوری خرداد ۱۴۰۰)

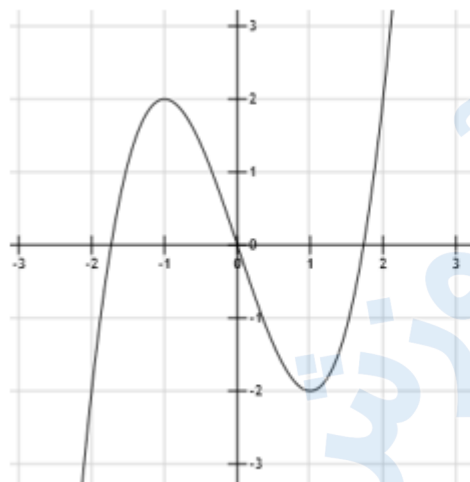
پاسخ:



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۴۴۰۲۵۸۶۰ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۸۸۹۰۴۰۰۲

کد تهران ۰۲۱



$(-1, 1)$ یا $[-1, 1]$

۵.

(۶ نمره)

اگر $f = \{(2, 3), (3, 5)\}$ باشد، حاصل $f^{-1}(3)$ برابر است. (هماهنگ کشوری خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$f = \{(2, 3), (3, 5)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(3, 2), (5, 3)\} \Rightarrow f^{-1}(3) = 2$$

۶.

(۶ نمره)



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

اگر $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-4}$ باشد، ضابطه تابع $g \circ f$ را بیابید. (بابک دهقانی)

پاسخ:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{1}{x^2-1} - 4}$$

(۲ نمره)

معادله مثلثاتی زیر را حل کنید و جواب عمومی آن را بنویسید. (ابراهیم داشن)

$$2 \sin x - \sqrt{3} = 0$$

پاسخ:

$$2 \sin x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} & k \in \mathbb{Z} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۴۴۰۲۵۸۶۰ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۸۸۹۰۴۰۰۲

کد تهران ۰۲۱

. ۸

(۳ نمره)

دامنه تابع $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ را مشخص کنید.

پاسخ:

$$f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow D_f = \text{درون پیرانتز درون} = \mathbb{R}$$

. ۹

(۲ نمره)

با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در کدام یک از ناحیه‌های مختصات نامعادله $\tan a > \sin a$ برقرار است؟

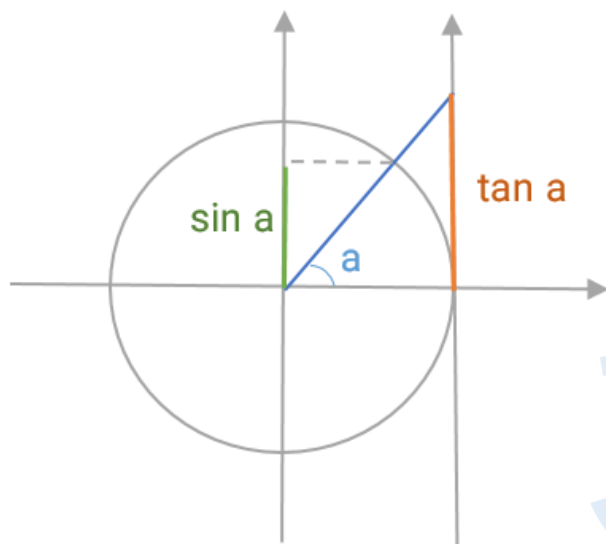
پاسخ:



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱



با توجه به شکل مشخص است در ناحیه‌های اول و سوم مختصات $\sin a < \tan a$ می‌باشد.

. ۱۰

(۶ نمره)

مقدار مینیمم تابع $f(x) = 1 - 2 \sin\left(-\frac{\pi}{3}x\right)$ را بیابید. (بابک دهقانی)

پاسخ :

$$\min = -|a| + c = -|-2| + 1 = -1$$



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

. ۱۱

(۶ نمره)

معادله زیر را حل کنید.

$$\sqrt{3} \cot 2x - 1 = 0$$

پاسخ :

$$\sqrt{3} \cot 2x - 1 = 0 \Rightarrow \cot 2x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

. ۱۲

(۶ نمره)

دامنه تابع $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$ را مشخص کنید.

پاسخ :



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

$$f(x) = \tan\left(\frac{x}{\gamma} + \frac{\pi}{\lambda}\right) \Rightarrow \frac{x}{\gamma} + \frac{\pi}{\lambda} = k\pi + \frac{\pi}{\gamma} \Rightarrow x = \gamma\left(k\pi + \frac{\pi}{\gamma} - \frac{\pi}{\lambda}\right) = k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

۱۳.

(۳ نمره)

حاصل حد تابع $f(x) = \frac{2x^2}{3x^2-1}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ میل می کند برابر است. (هماهنگ کشوری دی ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{3x^2-1} \stackrel{\text{هم‌ارزی پرتوان}}{=} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

۱۴.

(۲ نمره)

یک همسایگی محذوف برای عدد ۳ بنویسید. (محمد خوشرو)



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

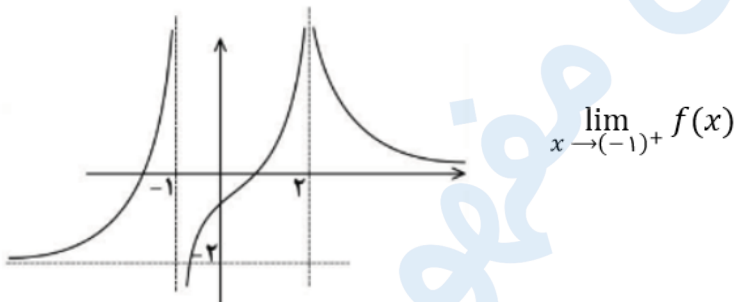
پاسخ :

$$(1, 4) - \{3\}$$

. ۱۵

(۲ نمره)

با توجه به نمودار تابع $f(x)$ حاصل حد زیر را بیابید. (بابک دهقانی)



پاسخ :

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$$

. ۱۶

(۶ نمره)



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x} - x$ را در صورت وجود به دست آورید.

پاسخ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x} - x = \infty - \infty \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}$$

حالا از هم‌ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{|x| + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

. ۱۷

(۶ نمره)

حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{4x^2 + 3}}{3x + \sqrt{x}}$$



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

پاسخ :

از هم‌ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty : & 4x^2 + 3 \sim 4x^2 \Rightarrow \sqrt{4x^2 + 3} \sim \sqrt{4x^2} = |2x| = 2x \\ x \rightarrow +\infty : & 3x + \sqrt{x} \sim 3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{4x^2 + 3}}{3x + \sqrt{x}} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2x}{3x} = \frac{3}{3} = 1$$

. ۱۸

(۶ نمره)

حاصل عبارت زیر چند است؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[\sin x]}{x}$$

پاسخ :



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۴۴۰۲۵۸۶۰ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۸۸۹۰۴۰۰۲

کد تهران ۰۲۱

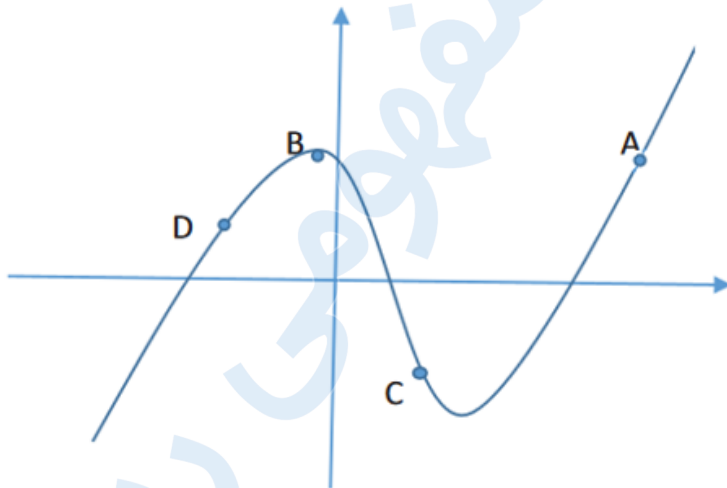
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[\sin x]}{x} = \frac{[0^-]}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$x \rightarrow 0^-$ انتهای کمان در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی و سینوس منفی است

.۱۹

(۲ نمره)

با توجه به نمودار داده شده شیب منحنی در نقطه B کدام است؟ (محمد خوشرو)



پاسخ :

خط مماس بر منحنی در این نقطه افقی و در نتیجه شیب آن صفر است.



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۴۴۰۲۵۸۶۰ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۸۸۹۰۴۰۰۲

کد تهران ۰۲۱

۲۰.

(۳ نمره)

مشتق تابع زیر را محاسبه نمایید (ساده کردن مشتق الزامی نیست):

$$y = \sqrt[5]{(x^2+x)^2}$$

پاسخ:

$$y = \sqrt[5]{(x^2+x)^2} \xrightarrow{y = \sqrt[m]{u^n} \Rightarrow y' = \frac{n u'}{m \sqrt[m]{u^{m-n}}}} y' = \frac{2(2x+1)}{5\sqrt[5]{(x^2+x)^3}}$$

۲۱.

(۲ نمره)

در تابع $f(x) = x^2 - 2x$ مقدار $f'(-1)$ را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.

پاسخ:



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-3) = -4$$

. ۲۲

(۶ نمره)

معادله حرکت متحرکی به صورت $x(t) = t^3 - 8t^2 + 5t + 8$ است. در چه بازه زمانی این متحرک در جهت منفی محور x ها حرکت می کند؟

پاسخ :

اگر علامت سرعت (مشتق تابع حرکت) منفی باشد، متحرک در جهت منفی محور x ها حرکت می کند:

$$v(t) = x'(t) < 0 \Rightarrow v(t) = 3t^2 - 16t + 5 < 0 \Rightarrow (3t - 1)(t - 5) < 0 \Rightarrow \frac{1}{3} < t < 5$$

. ۲۳

(۶ نمره)

آهنگ تغییر حجم یک کره را نسبت به شعاع آن وقتی شعاع برابر ۳ باشد بدست آورید .



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

پاسخ :

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$
$$V' = \frac{4}{3} \pi \times 3R^2 \Rightarrow V' = 4\pi R^2$$
$$V'(2) = 4\pi (2)^2 = 16\pi$$

. ۲۴

(۶ نمره)

با استفاده از تعریف مشتق، آیا تابع زیر مشتق پذیر است؟

$$x=1 \text{ در } f(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

پاسخ :



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری و آنلاین با دبیران حرفه ای و پیگیری قدرتمند در مدرسه

۸۸۹۰۴۰۰۲ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۲۶۵۷۰۸۱۰ - ۴۴۰۲۵۸۶۰

کد تهران ۰۲۱

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 0}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{(x-1) \times \sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1) \sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} \\ f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = +\infty \quad f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = +\infty \end{aligned}$$

رسی تابع در نقطه $x=1$ مستقیم زیر نمی باشد