



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری در تهران و آنلاین در سراسر دنیا با بهترین دبیران در مدرسه

۷۷۱۸۱۳۹۹ - ۷۷۱۸۱۳۳۶ - ۶۶۷۱۳۴۷۲ - ۶۶۵۷۵۹۵۱ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۸۸۹۰۴۰۰۲

کد تهران ۰۲۱

۱- فرض کنید  $U = \{1, 3, \dots, 9, 10\}$  یک مجموعه مرجع باشد و  $A = \{1, \dots, 5\}$  و  $B = \{4, \dots, 10\}$  مجموعه زیر را مشخص کنید. (ساده)

$$(A \cap B)' - B = ?$$

پاسخ:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow A' = \{6, 7, 8, 9, 10\} \quad B = \{1, 2, 3\}$$

$$\rightarrow (A \cap B)' - B = A - B = \{4, 5\}$$

۲- بزرگترین و کوچکترین عضو مجموعه  $N = \{x \in N, 3 \leq x \leq 8\}$  را مشخص کنید. (ساده)

پاسخ:

$$x = 3 \rightarrow \frac{3(3) - 1}{3 - 1} = \frac{8}{2}$$

$$\frac{8}{2} > \frac{11}{3}$$

$$x = 4 \rightarrow \frac{3(4) - 1}{4 - 1} = \frac{11}{3}$$

⋮

$$x = 8 \rightarrow \frac{3(8) - 1}{8 - 1} = \frac{23}{7}$$

۳- اگر  $\alpha$  زاویه ای در ناحیه دوم و  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$  باشد حاصل عبارت  $\sin \alpha - \frac{1}{2} \tan \alpha$  را بیابید. (ساده)

پاسخ

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

در ناحیه دوم  $\sin \alpha$  مثبت است در نتیجه:  $\sin \alpha = +\frac{4}{5}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{-4}{3} \rightarrow x = \frac{1}{2} \left( -\frac{4}{3} \right) - \left( \frac{4}{5} \right) = -\frac{2}{3} - \frac{4}{5} = -\frac{22}{15}$$

۴- حاصل عبارت زیر را بیابید. (ساده)



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری در تهران و آنلاین در سراسر دنیا با بهترین دبیران در مدرسه

۷۷۱۸۱۳۹۹ - ۷۷۱۸۱۳۳۶ - ۶۶۷۱۳۴۷۲ - ۶۶۵۷۵۹۵۱ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۸۸۹۰۴۰۰۲

کد تهران ۰۲۱

الف)  $(\sqrt[6]{5})^{18} \times (\sqrt[7]{-3})^{14}$

ب)  $(\sqrt[3]{3^5 \sqrt{81}})^6$

پاسخ:

الف)  $5^{\frac{18}{6}} \times (-3)^{\frac{14}{7}} \rightarrow 5^3 \times (-3)^2 = 125 \times 9 = 1125$

ب)  $(\sqrt[3]{\sqrt[5]{3^5} \times 3^4})^6 = (\sqrt[15]{3^9})^6 = (3)^{\frac{9 \times 6}{15}} = 3^{\frac{18}{5}}$

۵ - عبارت زیر را گویا کنید. (ساده)

$$\frac{1}{1 - \sqrt[3]{x}}$$

$$\frac{1}{1 - \sqrt[3]{x}} \times \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} = \frac{(1 + \sqrt[3]{x})}{1 - \sqrt[3]{x}} \times \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} = \frac{(1 + \sqrt[3]{x})(1 + \sqrt[3]{x})}{1 - x} = \frac{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x}}{1 - x}$$

۶ - جواب معادله خواسته شده را با روش خواسته شده بیابید؟ (متوسط)

الف)  $x^2 - \sqrt{2}x = 5 + \sqrt{2}x$  (روش فرمول کلی)

ب)  $2x^2 + 7x - 9 = 0$  (مربع کامل)

حل: الف -

$$x^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2}x - 5 = 0$$

$$\underbrace{1}_{a}x^2 - \underbrace{2\sqrt{2}}_b x - \underbrace{5}_c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{2})^2 - 4(1)(-5) = 8 + 20 = 28 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{28}}{2} = \sqrt{2} + \sqrt{7}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{28}}{2} = \sqrt{2} - \sqrt{7}$$



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری در تهران و آنلاین در سراسر دنیا با بهترین دبیران در مدرسه

۷۷۱۸۱۳۹۹ - ۷۷۱۸۱۳۳۶ - ۶۶۷۱۳۴۷۲ - ۶۶۵۷۵۹۵۱ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۸۸۹۰۴۰۰۲

کد تهران ۰۲۱

ب -

$$x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{9}{2} = 0$$

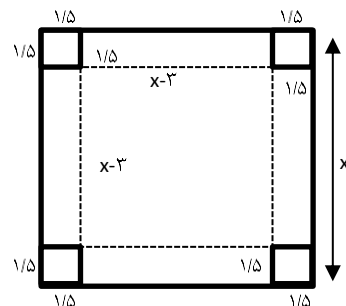
$$\left(x^2 + \frac{7}{2}x - \left(\frac{7}{4}\right)^2\right) - \frac{49}{16} - \frac{9}{2} = 0$$

$$\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{49 + 72}{16}\right) = 0$$

$$x + \frac{7}{4} = \pm \sqrt{\frac{121}{16}} \rightarrow x_1 = \frac{11}{4} - \frac{7}{4} = \frac{4}{4} = 1, \quad x_2 = \frac{-11}{4} - \frac{7}{4} = \frac{-18}{4} = \frac{-9}{2}$$

۷- در چهار گوشه ورقه ای فلزی و مربعی، برش های مربعی به ضلع  $\frac{1}{5}$  سانتی متر ایجاد کرده ایم. اگر حجم جعبه حاصل ۴۵ سانتی متر مکعب باشد طول ضلع ورقه ای فلزی چند سانتی متر است؟ (متوسط)

پاسخ:



$$V = \frac{1}{5}(x - \frac{3}{5})(x - \frac{3}{5}) = (x - \frac{3}{5})^2 = 30$$

$$x - \frac{3}{5} = -\sqrt{30} \rightarrow x = -\sqrt{30} + \frac{3}{5} < 0 \text{ غ.ق.}$$

$$x - \frac{3}{5} = +\sqrt{30} \rightarrow x = \sqrt{30} + \frac{3}{5} \text{ ق.ق.}$$

۸- مقدار  $a$  را طوری تعیین کنید که نامعادله زیر به ازای جميع مقادير  $x$  برقرار باشد. (خیلی سخت)

$$\left| \frac{x^2 + (m+1)x + m+2}{x^2 - x + 1} \right| \leq 2$$

پاسخ:

$$-2 \leq \frac{x^2 + (m+1)x + m+2}{x^2 - x + 1} \leq 2$$

با توجه به اینکه  $x^2 - x + 1 > 0$



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری در تهران و آنلاین در سراسر دنیا با بهترین دبیران در مدرسه

۷۷۱۸۱۳۹۹ - ۷۷۱۸۱۳۳۶ - ۶۶۷۱۳۴۷۲ - ۶۶۵۷۵۹۵۱ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۸۸۹۰۴۰۰۲

کد تهران ۰۲۱

$$\frac{x^2 + (m+1)x + m + 2}{x^2 - x + 1} - 2 \leq 0$$

$$x^2 + (m+1)x + m + 2 - 2(x^2 - x + 1) \leq 0 \rightarrow -x^2 + (3+m)x + m \leq 0$$

$$\Delta < 0 \rightarrow (3+m)^2 - 4(-1)(m) < 0 \rightarrow m^2 + 10m + 9 < 0 \rightarrow (m+9)(m+1) < 0$$

$m$	$-9$	$-1$	$\rightarrow -9 \leq m \leq -1$
$m^2 + 10m + 9$	+	-	+

حال داریم:

$$\frac{x^2 + (m+1)x + m + 2}{x^2 - x + 1} + 2 \geq 0$$

با توجه به اینکه  $x^2 - x + 1 > 0$  است داریم:

$$x^2 + (m+1)x + m + 2 + 2(x^2 - x + 1) \geq 0 \rightarrow 3x^2 + (m-1)x + (m+4) \geq 0$$

در نتیجه داریم:

$$(m-1)^2 - 4(3)(m+4) \leq 0 \rightarrow m^2 - 14m - 47 \leq 0$$

حال تعیین علامت می کنیم.

$$m^2 - 14m - 47 = 0$$

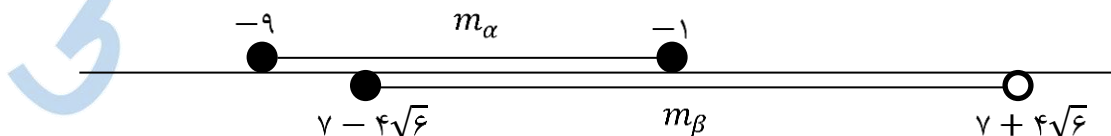
$$\Delta = (14)^2 - 4(1)(-47) = 196 + 188 = 384 > 0$$

$$m_1 = \frac{14 + \sqrt{384}}{2} = 7 + 4\sqrt{6}$$

$$m_2 = \frac{14 - \sqrt{384}}{2} = 7 - 4\sqrt{6}$$

$m$	$7 - 4\sqrt{6}$	$7 + 4\sqrt{6}$	$7 - 4\sqrt{6} \leq m \leq 7 + 4\sqrt{6}$
$m^2 - 14m - 47$	+	-	+

$$\text{حدود } m = m_\alpha \cap m_\beta = [7 - 4\sqrt{6}, -1]$$



تدریس خصوصی ریاضی در تهران و آنلاین سراسر کشور ۰۲۱۴۴۰۲۵۸۶ و ۰۲۱۸۸۹۰۴۰۰۲

مدرسه ، آینده را تصاحب کن

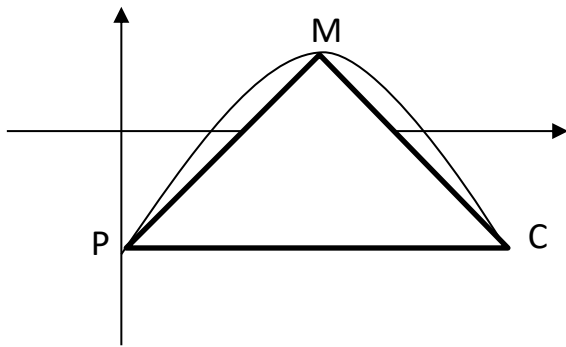


تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری در تهران و آنلاین در سراسر دنیا با بهترین دبیران در مدرسه

۷۷۱۸۱۳۹۹ - ۷۷۱۸۱۳۳۶ - ۶۶۷۱۳۴۷۲ - ۶۶۵۷۵۹۵۱ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۸۸۹۰۴۰۰۲

کد تهران ۰۲۱

۲۹- اگر نمودار سهمی به معادله  $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 2$  باشد مساحت مثلث MPC را بیابید. (خیلی سخت)



پاسخ:

$$x = \frac{-b}{2a} \rightarrow x = \frac{-\left(\frac{5}{2}\right)}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{5}{2}$$

راس سهمی

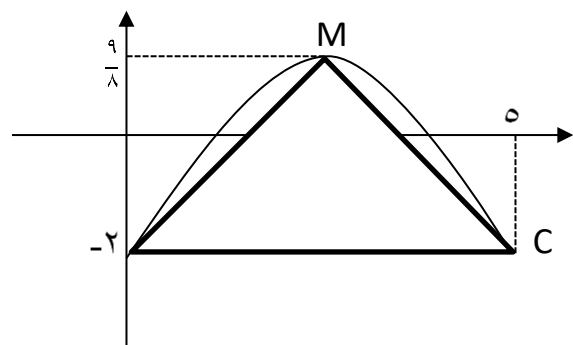
$$y = \frac{-1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}\right) - 2$$

$$y = \frac{-1}{2}\left(\frac{25}{4}\right) + \frac{25}{4} - 2 = \frac{-25 + 50 - 16}{8} = \frac{9}{8} \rightarrow M\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{8}\right)$$

$$x = 0 \rightarrow y = -2 \rightarrow P(0, -2)$$

$$y = -2 \rightarrow \frac{-1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 2 = -2 \rightarrow -x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(x - 5) = 0 \rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x = 5 \end{matrix}$$

$$\rightarrow S = \frac{h \times a}{2} = \frac{\left(2 + \frac{9}{8}\right) \times 5}{2} = \frac{125}{16}$$





تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری در تهران و آنلاین در سراسر دنیا با بهترین دبیران در مدرسه

۷۷۱۸۱۳۹۹ - ۷۷۱۸۱۳۳۶ - ۶۶۷۱۳۴۷۲ - ۶۶۵۷۵۹۵۱ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۸۸۹۰۴۰۰۲

کد تهران ۰۲۱

۱۰- اضلاع یک مثلث قائم الزاویه تشکیل تصاعد حسابی می دهند. اگر مساحت مثلث ۶ واحد باشد. اضلاع مثلث را بیابید.

(سخت)

پاسخ:

$$(a-d)^2 + a^2 = (a+d)^2 \rightarrow a^2 + d^2 - 2ad + a^2 = a^2 + d^2 + 2ad$$

$$\rightarrow 4ad = a^2 \rightarrow 4d = a$$

$$\frac{(a-d)a}{2} = 6 \rightarrow a^2 - ad = 12 \xrightarrow{a=4d} (4d)^2 - (4d)(d) = 12 \rightarrow 16d^2 - 4d^2 = 12$$

$$\rightarrow 12d^2 = 12 \rightarrow d^2 = 1 \rightarrow d = 1 \quad \rightarrow a = 4 \rightarrow 3, 4, 5$$

۱۱- در یک دنباله هندسی که جمله سوم آن ۱۲ و جمله نهم آن ۷۶۸ و جمله ششم را به دست آورید. (متوسط)

$$r_3 = 12 \rightarrow r_3 = r_1 q^2 \rightarrow 12 = r_1 q^2$$

$$r_9 = 768 \rightarrow r_9 = r_1 q^8 \rightarrow 768 = r_1 q^8$$

$$\rightarrow \frac{768}{12} = \frac{q^8}{q^2} \rightarrow 64 = q^6 \rightarrow q = 2 \rightarrow 12 = r_1 (2)^2 \rightarrow r_1 = 3$$

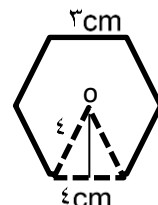
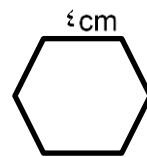
$$r_6 = r_1 q^5 \rightarrow r_6 = 3 \times (2)^5 = 32 \times 3 = 96 \rightarrow r_6 = 96$$

۱۲- مساحت شش ضلعی منتظم زیر را بدست آورید. (متوسط)

$$h = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

$$S_{\Delta} = \frac{\sqrt{12} \times 4}{2} = 2\sqrt{12}$$

$$S_{\text{شش ضلعی}} = 6 \times 2\sqrt{12} = 12\sqrt{12}$$



۱۳- اگر  $\frac{2 \tan \alpha - 1}{1 + 2 \tan \alpha} = 1$  حاصل  $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha - 2 \cos \alpha}$  را به دست آورید. (سخت)



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری در تهران و آنلاین در سراسر دنیا با بهترین دبیران در مدرسه

۷۷۱۸۱۳۹۹ - ۷۷۱۸۱۳۳۶ - ۶۶۷۱۳۴۷۲ - ۶۶۵۷۵۹۵۱ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۸۸۹۰۴۰۰۲

کد تهران ۰۲۱

$$2 \tan \alpha - 1 = 1 + 3 \tan \alpha \rightarrow -\tan \alpha = 2 \rightarrow \tan \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\Delta \sin \alpha}{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha} = \frac{\Delta \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{3 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 2 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\Delta \tan \alpha}{3 \tan \alpha - 2} \rightarrow \frac{\Delta(-\frac{1}{2})}{3(-\frac{1}{2}) - 2} = \frac{-\frac{\Delta}{2}}{-\frac{3}{2} - 2} = \frac{-\frac{\Delta}{2}}{\frac{-3-4}{2}} = \frac{-\Delta}{-7} = \frac{\Delta}{7}$$

۱۴- عبارت های زیر را تجزیه کنید.

الف -  $a^4 + 2$       ب -  $x^4 y + y^4 + x^2 y^2$

پاسخ: الف -

$$a^4 + 2 = (a^2)^2 + (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}a^2 - 2\sqrt{2}a^2 = (a^2 + \sqrt{2})^2 - \sqrt{2}a^2 =$$

$$(a^2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}a)(a^2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}a)$$

- ب

$$x^4 y + y^4 + x^2 y^2 = y(x^4 + y^4 + x^2 y^2) = y((x^2)^2 + (y^2)^2 + 2x^2 y^2 - x^2 y^2)$$

$$= y((x^2 + y^2)^2 - x^2 y^2) = y(x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)$$

۱۵- اگر  $a = x + \frac{1}{x}$  آنگاه  $x^6 + \frac{1}{x^6}$  را بیابید؟ (سخت)

پاسخ:

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = (x^2)^3 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^3 + 3x^2 \times \frac{1}{x^2} - 3x^2 \times \frac{1}{x^2} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 - 2$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 3x \times \frac{1}{x} - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)^3 - 2 = \left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)^3 - 2$$

$$= (a^2 - 3a)^3 - 2$$