



تدریس خصوصی ریاضی به صورت حضوری در تهران و آنلاین در سراسر دنیا با بهترین دبیران در مدرسه

۷۷۱۸۱۳۳۶ - ۷۷۱۸۱۳۳۶ - ۶۶۷۱۳۴۷۲ - ۶۶۵۷۵۹۵۱ - ۸۸۹۰۶۹۰۹ - ۸۸۹۰۴۰۰۲

کد تهران ۰۲۱

۱- خط  $d$  و نقطه  $p$  مفروض است. می خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه  $p$  بگذرد و بر خط  $d$  عمود باشد. به کمک پرگار نقاط مانند  $A$  و  $B$  بر خط  $d$  به گونه ای می یابیم که از نقطه  $p$  به یک فاصله باشند. حال فرض می کنیم می خواهیم عمود منصف پاره خط داده شده  $AB$  رسم می نماییم. از این رو دهانه پرگار را بیش از نصف طول  $AB$  باز کرده و یک بار به مرکز نقطه  $A$  و بار دیگر به همان شعاع و به مرکز نقطه  $B$  کمان می زنیم تا دو کمان یکدیگر را در دو نقطه  $p$  و  $q$  قطع کند. حال با داشتن دو نقطه  $p$  و  $q$  عمود منصف آن را رسم می کنیم.

-۲

$$\frac{x-2}{9} = \frac{x}{12} \rightarrow x=8$$

در نتیجه نسبت تشابه به دو مثلث برابر است با

$$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

نسبت مساحت آن دو برابر است با

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

-۳

الف - نمی توان درستی آن را پذیرفت زیرا برای نشان دادن درستی یک حکم باید اثبات ارائه نمود.

ب - اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع ها نیز با هم برابرند.

-۴

$$x_1 = x_2 = 2 \rightarrow m^2 - 5m + 4 = 0 \rightarrow (m-4)(m-1) = 0 \rightarrow m = 4, m = 1$$

$$m = 4 \rightarrow (3 + 4, 5) = (7, 5) \rightarrow m = 4 \text{ قابل قبول}$$

$$m = 1 \rightarrow (3 + 1, 5) = (4, 5) \rightarrow (4, 5) \neq (4, 3) \rightarrow m = 1 \text{ غیر قابل قبول}$$

۵- دامنه  $f(x)$

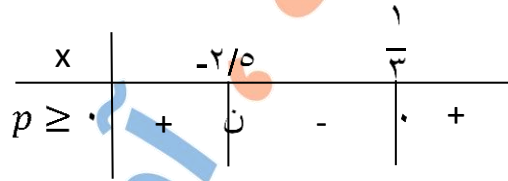
$$(2x-1)^2 - (x+3)^2 = 0 \rightarrow (2x-1)^2 = (x+3)^2 \rightarrow 2x-1 = x+3 \rightarrow x=4$$

$$2x-1 = -x-3 \rightarrow x = \frac{-2}{3}$$

$$D_f = R - \left\{ -\frac{2}{3}, 4 \right\}$$

دامنه  $g(x)$ :

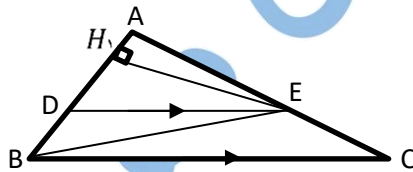
$$\frac{3x-1}{5x+2} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} 3x-1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3} \\ 5x+2 = 0 \rightarrow x = -\frac{2}{5} \end{cases}$$



$$D_g = \left( -\infty, -\frac{2}{5} \right) \cup \left[ \frac{1}{3}, +\infty \right)$$

۶- اگر پاره خط  $DE$  موازی ضلع  $BC$  از مثلث  $ABC$  باشد، آنگاه نسبت پاره خط ایجاد شده در ضلع  $AB$  برابر است با نسبت پاره خط ایجاد شده در ضلع  $AC$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

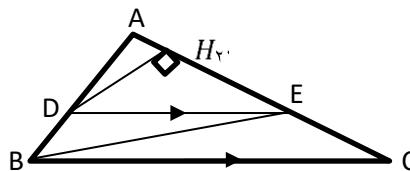


استدلال: ۱- از نقطه  $E$  به ضلع  $AB$  عمود کرده و پای عمود را  $H_1$  بنامید و از راس  $B$  به راس  $E$  وصل می کنیم. در این صورت داریم:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}} = \frac{\frac{1}{2} EH_1 \times AD}{\frac{1}{2} EH_1 \times DB} = \frac{AD}{DE}$$

۲- از نقطه  $D$  به ضلع  $AC$  عمود کرده و پای عمود را  $H_2$  بنامید.

$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}} = \frac{\frac{1}{2} DH_2 \times AE}{\frac{1}{2} DH_2 \times EC} = \frac{AE}{EC}$$



۳- از نقطه  $D$  به  $C$  . نیز  $E$  به  $B$  وصل کنید. مساحت های مثلث های  $DEC$  و  $DEB$  که آنها را با  $S_{DEB}$  و  $S_{DEC}$  می نامیم با هم برابرند زیرا:

$$\frac{S_{DEC}}{S_{DEB}} = \frac{\frac{1}{2} CH_1 \times DE}{\frac{1}{2} BH_2 \times DE} = \frac{DE}{DE} = \frac{CH_1}{BH_2} = 1$$

فاصله دو خط موازی همواره با هم برابرند. از اینرو داریم:

$$S_{DEC} = S_{DEB}$$

$$1 و 2 و 3 \rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{AE}{EC}$$

۷- دو مثلث مشابه اند زیرا:

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{B}_1 = \hat{E}_1 \rightarrow \hat{H} = \hat{H} \end{cases} \Rightarrow ABH \sim AHE$$

$$\Rightarrow \frac{X}{Y} = \frac{AB}{AE} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

فرض:  $BH \neq HC$

حکم:  $AB \neq AC$

برهان خلف: فرض می کنیم  $AB=AC$  آنگاه داریم:

$$\begin{cases} AH = AH \text{ (ضلع مشترک)} \\ A_1 = A_2 \text{ (طبق فرض - نیمساز)} \\ AB = AC \text{ (طبق فرض برهان)} \end{cases} \rightarrow ABH \cong AHC \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} BH = HC$$

که این خلاف با فرض مسئله است. از این رو  $AB \neq AC$

$$x^2 - 6x + 9 + \sqrt{y^2 + 2y + 1} = 0 \rightarrow (x - 3)^2 + \sqrt{(y + 1)^2} = 0$$

$$\rightarrow (x - 3)^2 + |y + 1| = 0$$

هر گاه مجموع چند عبارت نامنفی صفر شود باید هر کدام از آنها صفر گردد.

$$\begin{aligned} x - 3 &= 0 \rightarrow x = 3 \\ y + 1 &= 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow R = \{(3, -1)\} \end{aligned}$$

۱۰- الف :

$$f(x) = ax + b$$

$$f(x + 2) = a(x + 2) + b = ax + 2a + b$$

$$f(x - 3) = a(x - 3) + b = ax - 3a + b$$

$$\rightarrow f(x + 2) + f(x - 3) = ax + 2x + b + ax - 3a + b = 2ax - a + 2b = 4x + 8$$

ب:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 2 = 3(2 + x) - 2 = 3x + 4$$

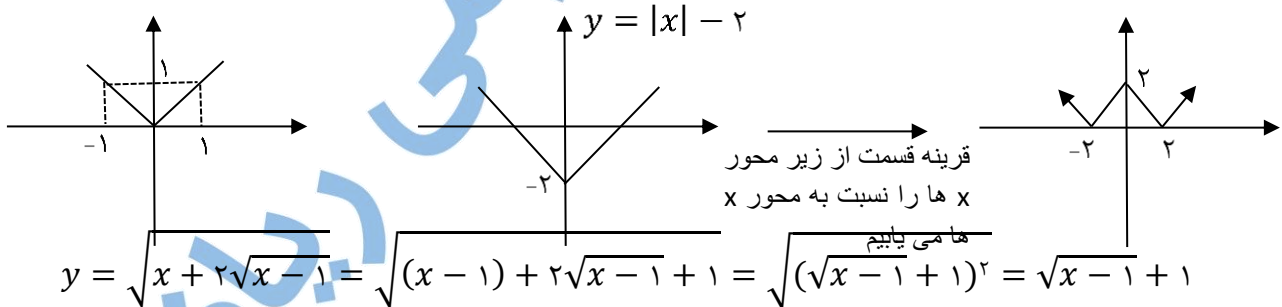
برای یافتن ضابطه معکوس تابع  $f \circ g$ ، کافی است در معادله فوق  $x$  را بر حسب  $y$  حساب کرده و سپس نقش  $x$  و  $y$  را عوض کنیم.

$$y = 3x + 4 \rightarrow 3x = y - 4 \rightarrow x = \frac{y}{3} - \frac{4}{3}$$

با تعویض نقش  $x$  و  $y$  خواهیم داشت  $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{3}$

۱۱- الف : برای رسم نمودار  $y = |f(x)|$  ابتدا نمودار  $y = f(x)$  را رسم نموده و سپس قرینه قسمتی از نمودار که زیر محور  $x$  ها قرار دارد، نسبت به محور  $x$  ها می یابیم. قسمت بالای محور  $x$  ها برای هر دو تابع  $f(x)$  و  $|f(x)|$  مشترک است.

$$D_f = R \quad R_f = [0, +\infty)$$

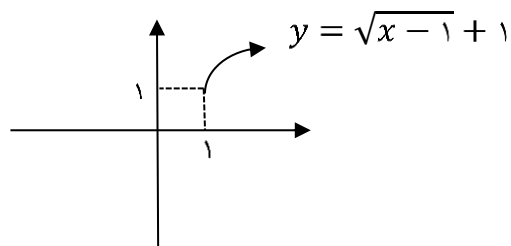


ج:

$$y = \sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} = \sqrt{(x - 1) + 2\sqrt{x - 1} + 1} = \sqrt{(\sqrt{x - 1} + 1)^2} = \sqrt{x - 1} + 1$$

ابتدا نمودار  $y = \sqrt{x}$  را یک واحد به سمت راست، سپس یک واحد به سمت بالا می بریم.

$$D_f = [1, +\infty) \quad R_f = [1, +\infty)$$



$$f[x] = 24 \rightarrow [x] = 6 \rightarrow 6 \leq x < 7$$

$$[x] + 2[x] = 6 \rightarrow 3[x] = 6 \rightarrow [x] = 2 \rightarrow 2 \leq x < 3$$

$$2x^2 - (a+1)x + b + 2 = 0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{2a} \rightarrow 2 = \frac{a+1}{2(2)} \rightarrow a+1 = 8 \rightarrow a = 7$$

$$2x^2 - 8x + b + 2 = 0$$

$$x = 2 \rightarrow 2(2)^2 - 8(2) + b + 2 = 0 \rightarrow b = 6$$

۱۴- می دانیم در مثلث قائم الزاویه ای که یک زاویه آن ۱۵ درجه باشد ارتفاع وارد بر وتر  $\frac{1}{4}$  وتر است و از طرفی دیگر در مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است. حال اگر اندازه وتر مثلث قائم الزاویه را  $BC = a$  فرض کنیم داریم:

$$AH = \frac{1}{4}a \quad \text{و} \quad AM = \frac{1}{2}a$$

$$AHM: AM^2 = AH^2 + HM^2 \Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 + HM^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{16} = HM^2 \Rightarrow HM^2 = \frac{3a^2}{16} \Rightarrow HM = \frac{\sqrt{3}}{4}BC$$

$$f(x) = -\frac{1}{x} \quad f(f(x)) = f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{-\frac{1}{x}} = x$$

$$f(f(f(x))) = f(x) = -\frac{1}{x} \quad f(f(f(f(x)))) = f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{-\frac{1}{x}} = x$$

برداشت: اگر تعداد  $f$  ها زوج باشد حاصل برابر  $x$  و اگر تعداد  $f$  ها فرد باشد حاصل  $\frac{-1}{x}$  می باشد.

# مدرسه‌سازانه ، آموزش مفهومی ریاضی