

-۳

شناسنامه علمی:

سطح سؤال: ساده

حل:

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0 - 1}{-2\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \alpha \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \beta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

-۴

شناسنامه علمی:

سطح سؤال: ساده

حل:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(0) = 4 \rightarrow C = 4 \\ f(2) = 0 \rightarrow 4a + 2b + 4 = 0 \quad (I) \\ \frac{-b}{2a} = 2 \rightarrow b = -4a \quad (II) \end{cases}$$

$$(I), (II) \rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$$



شناسنامه علمی:
سطح سؤال: ساده

حل:

اگر x_1 و x_2 جوابهای معادله $3x^2 + 7x - 2 = 0$ باشد آن گاه $x_1' = -x_1$ و $x_2' = -x_2$ جوابهای معادله جدید خواهد بود.

$$S' = x_1' + x_2' = \frac{7}{3}$$

$$P' = x_1' x_2' = (-x_1)(-x_2) = x_1 x_2 = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 - Sx + P' = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{7}{3}x - \frac{2}{3} = 0$$

شناسنامه علمی:
سطح سؤال: متوسط

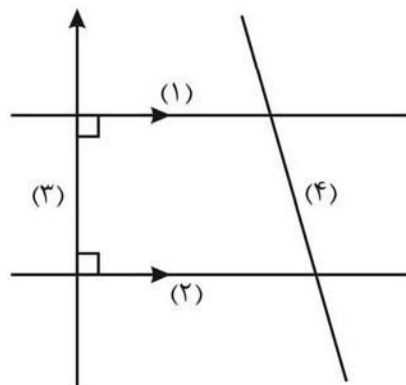
حل:

$$1) y = 2x + 5 \rightarrow m = 2$$

$$3) 2y + x = 1 \rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

$$2) y = 2x + \frac{1}{5} \rightarrow m = 2$$

$$4) 4y - 2x - 1 = 0 \rightarrow m = \frac{1}{2}$$



خطوط (۱) و (۲) با هم موازی‌اند.

هر یک از خطوط (۲) و (۳) بر (۱) عمودند و خط (۴) بر هیچ‌یک نه عمود

است و نه موازی. در این صورت چهارضلعی فرضی

کلاسهای ریاضی مقدماتی ویرژن

-۷

شناسنامه علمی:

سطح سؤال: متوسط

حل:

$$h(t) = -5t^2 + 100t$$

$$a = -5 < 0 \Rightarrow \cup_{\max} \Rightarrow \begin{cases} t_{\max} = -\frac{b}{2a} = 10 \rightarrow \text{الف} \\ h_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = 500 \rightarrow \text{ب} \end{cases}$$

$$h = 0 \rightarrow -5t^2 + 100t = 0 \begin{cases} t = 0 \text{ ق.ق} \\ t = 20 \text{ ق.ق} \end{cases}$$

ج

-۸

شناسنامه علمی:

سطح سؤال: متوسط

حل:

$$\text{الف) } \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 = 7 \rightarrow \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{7}$$

$$\text{ب) } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{S}{P} = \frac{-b}{C} = \frac{3}{4}$$



شناسنامه علمی:

سطح سؤال: متوسط

حل:

ارتفاع وارد بر ضلع BC خطی است که از نقطه A می‌گذرد و بر BC عمود است.

$$m_{BC} = \frac{3-1}{2-(-2)} = \frac{1}{2}$$

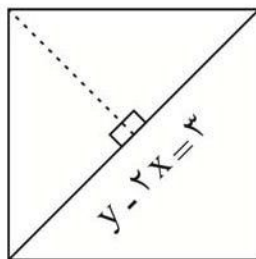
$$m_{AH} = -2, A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad m_{AH} = -2$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = -2x - 2$$

شناسنامه علمی:

سطح سؤال: متوسط

حل:



$$d = \left| \frac{2 - (-2) - 4}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \right| = \left| \frac{0}{\sqrt{5}} \right| = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$S = \frac{d^2}{2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}{2} = \frac{1}{10}$$

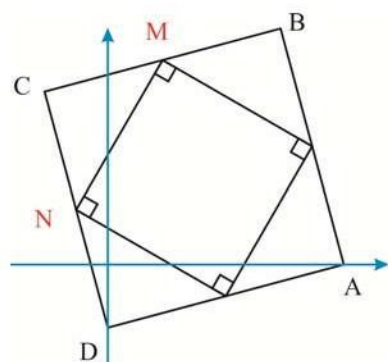


کلاسهای ریاضی مقدماتی ویران

شناسنامه علمی:
سطح سؤال: سخت

حل:

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = \sqrt{17}$$



$$m_{CB} = -\frac{1}{m_{AB}} \Rightarrow \text{اضلاع بر هم عمودند}$$

$$m_{AB} = -\frac{1}{m_{DA}}$$

چون هم اضلاع بر هم عمودند و چهار ضلع برابر است بنابراین شکل حاصل مربع است.

$$\text{نقطه میانی } CD = \left(-\frac{1}{2}, 11\right) \text{ و } \text{نقطه میانی } DA = \left(2, -\frac{1}{2}\right) \text{ و } \text{نقطه میانی } BC = \left(1, \frac{1}{2}\right) \text{ و } \text{نقطه میانی } AB = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

شکل حاصل از متصل نمودن وسط اضلاع مربع نیز مربع است.

پس برای یافتن مساحت کافی است اندازه طول یک ضلع آن را محاسبه نموده:

$$\begin{array}{c} \text{وسط } CD \\ \uparrow \\ |MN| = \sqrt{\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{34}{4}} \\ \downarrow \\ \text{وسط } BC \end{array}$$

$$S = |MN|^2 = \left(\sqrt{\frac{34}{4}}\right)^2 = \frac{34}{4} = 8\frac{1}{2}$$



کلاسهای ریاضی مقدماتی ویرژن

شناسنامه علمی:
سطح سؤال: سخت

حل:

فرض کنید (a, b) نقطه دلخواهی روی نیمساز باشد. فاصله‌ی آن را تا دو خط یافته و مساوی هم قرار می‌دهیم.

$$\frac{|2a+3b-4|}{\sqrt{3^2+3^2}} = \frac{|3a+2b+1|}{\sqrt{3^2+3^2}}$$

$$\Rightarrow 2a+3b-4 = \pm(3a+2b+1)$$

$$2a+3b-4 = 3a+2b+1 \rightarrow b = a+5 \rightarrow y = x+5$$

$$2a+3b-4 = -(3a+2b+1) \rightarrow b = -a + \frac{3}{5} \rightarrow y = -x + \frac{3}{5}$$

شناسنامه علمی:
سطح سؤال: سخت

حل:

الف) حاصل رادیکال‌های دارای فرجه‌ی زوج نامنفی است.

پس در معادله‌ی داده شده مجموع دو عبارت نامنفی مساوی صفر است. پس باید تک‌تک آن‌ها برابر صفر باشد. یعنی:

$$\sqrt{x^2 - x - 6} = 0$$

$$\sqrt{x^2 - 5x^2 - 2x + 24} = 0$$

اما دو عبارت رادیکالی فوق به ازای ریشه‌های مشترک، هر دو برابر صفر می‌شوند پس کافی است، ریشه‌های اولی را پیدا کرده و در

دومی امتحان کنیم.

$$\sqrt{x^2 - x - 6} = 0 \xrightarrow{\text{دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم}} x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2, x = 3$$

اگر اعداد بالا را در معادله‌ی دوم قرار دهیم، می‌بینیم در آن صدق می‌کند.

بنابراین معادله‌ی داده شده دارای دو ریشه است.

ب) اگر به طرفین معادله ۲ واحد اضافه کنیم، داریم:

$$\underbrace{(x^2 + \sqrt{x} + 1)}_t + \underbrace{(x^2 + \sqrt{x} + 1)}_t = 2$$

$$\Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \begin{cases} t=1 \\ t=-1 \end{cases}$$

$$t=1 \rightarrow x^2 + \sqrt{x} + 1 = 1 \rightarrow x^2 + \sqrt{x} = 0 \rightarrow x=0$$

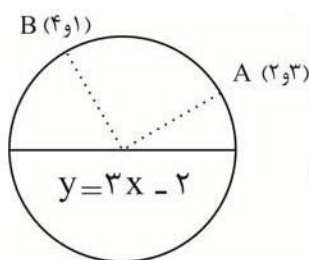
$$t=-2 \rightarrow \underbrace{x^2 + \sqrt{x} + 1}_{\text{مثبت}} = \underbrace{-2}_{\text{منفی}} \quad \text{غ.ق.ق}$$

-۱۴

شناسنامه علمی:

سطح سؤال: خیلی سخت

حل:



$$OA = \sqrt{(\alpha - 2)^2 + (3\alpha - 2 - 3)^2}$$

$$OB = \sqrt{(\alpha - 4)^2 + (3\alpha - 2 - 1)^2}$$

$$OA = OB$$

$$\Rightarrow \sqrt{(\alpha - 2)^2 + (3\alpha - 5)^2} = \sqrt{(\alpha - 4)^2 + (3\alpha - 3)^2}$$

$$\Rightarrow -34\alpha + 29 = 25 - 26\alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$O = (\alpha, 3\alpha - 2) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right)$$

$$R = OA = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - 2\right)^2 + \left(-\frac{7}{2} - 3\right)^2} = \frac{\sqrt{194}}{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{1}_{\text{به‌علت (۱)}} + \underbrace{149}_{\text{مضارب ۲}} + \underbrace{39}_{\text{مضارب ۳}} = 189$$



شناسنامه علمی:

سطح سؤال: خیلی سخت

حل:

می‌دانیم اضلاع مقابل یک مربع با هم موازی هستند و فاصله دو ضلع موازی برابر طول یک ضلع مربع خواهد بود. بنابراین:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 2 = 0 \\ 8y - 6x - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8y - 6x - 4 = 0 \\ 8y - 6x - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-4 - (-5)|}{\sqrt{(-6)^2 + 8^2}} = \frac{1}{10}$$

$$\text{مساحت مربع} = S = d^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$$

$$= \frac{(\text{قطر})^2}{2} = \frac{1}{100} \Rightarrow \text{قطر} = \sqrt{\frac{2}{100}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

مرکز ریاضیات ویتن